$$d(x,y) \leq e(x,y) \leq \sqrt{n}\ d(x,y)$$

$$e(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \underset{\text{هولدر}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{n}\ d(x,y)$$

تعريف: الفضاء المتري التام:

نقول عن فضاء E_d المتري أنه تام إذا كانت كل متتالية كوشي فيه متقاربة من عنصر من هذا الفضاء.

تمرين: (1)

ادرس تمام الفضاء l_p ؛ $1 \leq p < \infty$ ، مع المسافة:

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

الحل: لنأخذ المتتالية: $x^n = \{x_n^n\}$ والأساسية في الفضاء l_p

أي أنها تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon) \in N \ ;\ \forall n > m > N_0(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$d(x^n, x^m) < \varepsilon$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^n - x_n^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^n - x_n^m|^p < \varepsilon^p$$

$$\forall n \in N : |x_n^n - x_n^m| < \varepsilon$$

أي تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0(\varepsilon) \in N \ ;\ \forall n > m > N_0(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$|x_n^n - x_n^m| < \varepsilon$$

$\{x_n^n\}$ متتاليات أساسية متقاربة

/ /

بسبب تمام الفضائين $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$ ينتج أن $\{x_n^n\}$ متقاربة، ومنه:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^n = x_n^0 \qquad \forall n\in N$$

سنبرهن أن العنصر $x^0=\{x_n^0\}_{n\geq 1}$ ينتمي إلى l_p ..

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^0-x_n^n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^0-x_n^m+x_n^m-x_n^n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^0-x_n^m|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^m-x_n^n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ولدينا:

$x^0-x^n\in l_p$ و $x^n\in l_p$ إذاً: (جمعنا)

$$x^0=x^0-x^n+x^n\in l_p$$

مجموع عنصرين من l_p هو عنصر من l_p إذاً الفضاء l_p هو فضاء تام ..

تمرين: (2)

أثبت أن الفضاء l_∞ تام مع المسافة:

$$d(x,y)=\sup|x_n-y_n|$$

الحل: لنأخذ المتتالية $x^n=\{x_n^n\}$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0(\varepsilon)\in N\ ;\ \forall n>m>N_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow d(x^n,x^m)<\varepsilon$$

$$\sup_n|x_n^n-x_n^m|<\varepsilon\Rightarrow$$

$$|x_n^n-x_n^m|<\varepsilon,\ \forall n>m>N_0(\varepsilon)\ ;\ \forall n\in N$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n^n=x_n^0\ ;\ \forall n\in N$$

$$\sup_n|x_n^0-x_n^n|=\sup_n|x_n^0-x_n^m+x_n^m-x_n^n|$$

Alnour

Scanned by CamScanner

/ /

$$\leq \sup|x_n^0 - x_n^m| + \sup|x_n^m - x_n^n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow x^0 - x^n \in l_\infty$$

$$x^n \in l_\infty$$

$$\Rightarrow x^0 = x^0 - x^n + x^n \in l_\infty$$

تمرين: (3)

ادرس تمام الفضاء $BV[a,b]$ مع المسافة:

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f-g)$$

الحل:

لتأخذ المتتالية الأساسية $\{f_n\}$ من $BV[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ ; \ \forall n > m > N_0(\varepsilon)$$

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \Rightarrow |f_n(a) - f_m(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n - f_m) < \varepsilon$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) + f_n(a) - f_n(a) + f_m(a) - f_m(a) - f_m(x)|$$

$$\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \big[|f_n(x) - f_m(x)| + |f_n(a) - f_m(a)|\big]$$

$$\leq |f_n(a) - f_m(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n - f_m) < \varepsilon$$

وبالتالي تصبح المتتالية $\{f_n(x)\}$ أساسية من أجل كل $x \in [a,b]$

أي هي متتالية كوشي (بالمفهوم النقطي) بالتالي فهي متتالية متقاربة نقطياً (بسبب تمام الفضاء $\mathbb{R}$):

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad , \ \forall x \in [a,b]$$

من أجل التجزئة الاختيارية: $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$

Alnour

Scanned by CamScanner

التحويل $x=\frac{t-a}{b-a}$ ينقل من $C[a,b]$ إلى $C[0,1]$

/ /

للفترة $[a,b]$ نكتب:

$$|f_n(a)-f_m(a)| + \sum_{k=1}^{n} |[f_n(x_k)-f_m(x_k)]-[f_n(x_{k-1})-f_m(x_{k-1})]|$$
$\forall x\in[a,b]$

$$\leqslant \varepsilon \quad ; \quad \forall\, n>m>N_0(\varepsilon)$$

نجعل $n \longrightarrow \infty$:

$$|f(a)-f_m(a)| + \sum_{k=1}^{n} |[f(x_k)-f_m(x_k)]-[f(x_{k-1})-f_m(x_{k-1})]| < \varepsilon$$

$$f-f_m \in BV[a,b]$$
$$f = f-f_m+f_m \in BV[a,b]$$

تمرين: (4)

ادرس تمام الفضاء $C[0,1]$ مع المسافة:

$$d(f,g)=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|$$

والمسافة:

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

الحل:

1) إن الفضاء $C[0,1]$ مع المسافة

$$d(f,g)=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|$$

هو فضاء تام لأنه:

من أجل المتتالية الأساسية $\{f_n\}$ في الفضاء $C[0,1]$:

$$\forall \varepsilon>0 \;,\; \exists\, N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \;;\; \forall\, n>m>N_0(\varepsilon)$$

$$d(f_n,f_m)<\varepsilon$$

$$\max_{0\leq x\leq 1}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

Alnour

Scanned by CamScanner

/ /

وهنا يحل شرط كوشي في التقارب المنتظم لمتتاليات الدوال، أي أن

$\{f_n\}$ متقاربة بانتظام من دالة f على المجال $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ولما كانت المتتالية المعطاة متتالية من التوابع المعرفة والمستمرة على

المجال $[0,1]$ فإن دالة النهاية ستكون معرفة على المجال $[0,1]$
↓
والتقارب منتظم

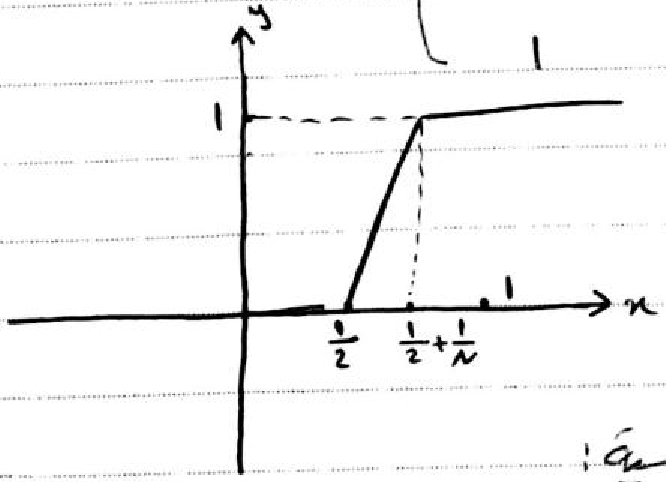
فهي من الفضاء $C[0,1]$ إذاً هو تام

2) لنثبت أن $C[0,1]$ ليس تام مع المسافة:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$$

٠) لنأخذ المتتالية $\{f_n(x)\}$ من الفضاء $C[0,1]$ بالشكل:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ N(x - \frac{1}{2}) & ; \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \\ 1 & ; \frac{1}{2} + \frac{1}{N} < x \leq 1 \end{cases}$$



واضح من الرسم أنه مستمر

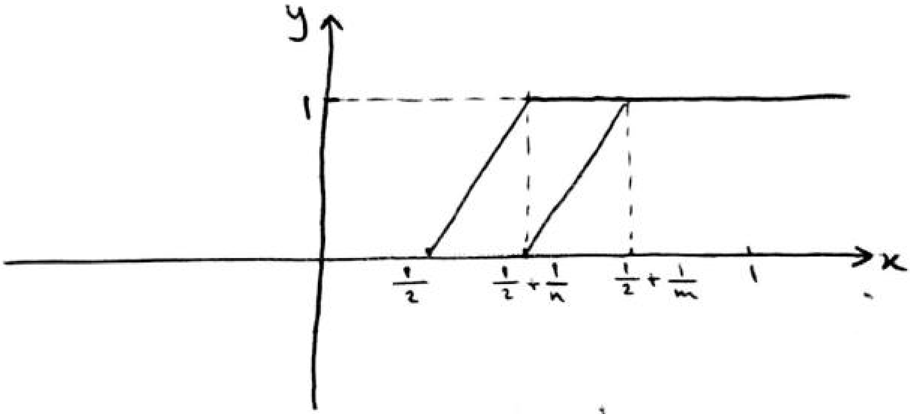
لنثبت أنها متتالية أساسية:

Scanned by CamScanner

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ m(x-\frac{1}{2}) & ; \ \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \\ 1 & ; \ \frac{1}{2} + \frac{1}{m} < x \leq 1 \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \ n > m > N_0(\varepsilon)$

$n > m \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$



$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |n(x-\tfrac{1}{2}) - m(x-\tfrac{1}{2})|\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |1 - m(x-\tfrac{1}{2})|\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (n-m)(x-\tfrac{1}{2})\,dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} [1 - m(x-\tfrac{1}{2})]\,dx$$

Alnour

Scanned by CamScanner

/ /

$$= (n-m)\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + \left[x - m\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right)\right]_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{n-m}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{m}-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right.$$

$$\left.-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= \frac{n-m}{2}\left[\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}+\frac{m}{8}-\frac{1}{n}-\frac{m}{8}-\frac{m}{2n^2}+\frac{m}{4}$$

$$= \frac{1}{2n}-\frac{m}{2n^2}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}+\frac{m}{8}-\frac{1}{n}-\frac{m}{8}-\frac{m}{2n^2}+\frac{m}{4}$$

$$= \frac{-1}{2n}+\frac{1}{2m}$$ ~~$-\frac{m}{n^2}+\frac{m}{4}<\frac{1}{2m}+\frac{m}{4}<\frac{3m}{4}$~~

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2m} < \varepsilon$$

$$2m > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow m > \frac{1}{2\varepsilon}$$

إذن $N_0(\varepsilon) = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\right|$ تم المطلوب

Scanned by CamScanner